Ammissione EGMO Camp Pisa 2024

Testo della prova

1. In una circonferenza, i punti A e B sono presi su archi opposti di un diametro CD. I segmenti CE e DF sono perpendicolari ad AB in modo che A, E, F e B siano allineati in questo ordine. Sapendo che $AE = 1$ calcolare la lunghezza di BF.

2. Definiamo
$$P(x) = (x - 1^2)(x - 2^2)(x - 3^2) \cdots (x - 100^2).$$
Quanti interi n ci sono tali che $P(n) \leq 0$?

3. Dimostrare che non esiste nessun multiplo di 11 la cui somma delle cifre sia esattamente uguale a 7.

4. Dimostrare che se l'insieme dei numeri $\{3, 4, 5, \ldots 3^5\}$ viene partizionato in due insiemi disgiunti, allora in uno dei due insiemi si possono trovare dei numeri a, b, c tali che $a \cdot b = c$.

   N.B. I numeri a, b, c possono *non* essere a due a due distinti.

   N.B. 2: *Partizionare* un insieme A significa dividere i suoi elementi in due insiemi B e C tali che
$$A = B \cup C, \qquad B \cap C = \emptyset.$$

5. È dato un parallelogramma $ABCD$ tale che ($AB \neq BC$). I punti E e G sono scelti sulla linea $\overline{CD}$ in modo che $\overline{AC}$ sia la bisettrice di entrambi gli angoli $\angle EAD$ e $\angle BAG$. La linea $\overline{BC}$ interseca $\overline{AE}$ e $\overline{AG}$ in F e H, rispettivamente. Dimostrare che la linea $\overline{FG}$ passa per il punto medio di HE.

6. Sia $n > 2$ un intero numero intero, e siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri reali distinti; inoltre chiamiamo M il massimo di questi numeri ed m il loro minimo. Nel caso in cui n è dispari, dimostrare che è possibile scegliere i segni nell'espressione
$$s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$$
in modo che $m < s < M$.

7. Ci sono 25 lampadine disposte nel seguente modo: le prime 24 sono collocate lungo una circonferenza ai vertici di un 24-agono regolare, e la rimanente lampadina è posta al centro della circonferenza sopra menzionata. Ad ogni mossa, si può fare una delle seguenti operazioni:

   - Scegliere due lampadine sulla circonferenza tali che tra di loro ci sia un numero *dispari* di lampadine e cambiare stato delle lampadine scelte e di quella al centro.
   - Scegliere tre lampadine sulla circonferenza che formino un triangolo equilatero e cambiare lo stato di queste lampadine e di quella al centro.

   Dimostrare che a partire da una configurazione qualunque di lampadine accese o spente, è possibile arrivare ad avere tutte le lampadine accese. **N.B.** Con *cambiare stato* di una lampadina si intende accenderla nel caso in cui sia spenta, o spegnarla nel caso in cui sia accesa.

8. Tiziana ha scritto 5 numeri naturali distinti ai vertici di un pentagono. Successivamente, su ogni lato del pentagono scrive il minimo comune multiplo dei due numeri scritti agli estremi del segmento stesso. A questo punto si accorge che i 5 numeri scritti sui lati del pentagono sono uguali! Trovare (e dimostrare) qual é il più piccolo numero che Tiziana può aver scritto sui lati del pentagono.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 3 ore di tempo a disposizione.